7. Un cuerpo de masa 1 kg está unido a un resorte de constante $k = 16$ N/m. Determine la posición y la velocidad de la masa en todo tiempo, si sobre ésta se aplica una fuerza de excitación $F_e(t) = e^{-t}\operatorname{sen} t$, a partir de $t = 0$, suponiendo que el sistema estaba en reposo y en su punto de equilibrio.

8. Un sistema masa-resorte-amortiguador está colocado verticalmente y tiene constantes $m = \dfrac{1}{8}$ kg, $c = 1$ N·s/m y $k = 2$ N/m. Inicialmente la masa es colocada 1 m abajo de la posición de equilibrio, donde se le imprime una velocidad de 8 m/s hacia arriba. Determine la posición y la velocidad instantánea de la masa m si sobre el sistema se aplica una fuerza de excitación $F_e(t) = 12.5\operatorname{sen} 2t$ N, a partir de $t = 0$.

9. Un sistema masa-resorte-amortiguador tiene constantes $m = 6.5$ kg, $c = 12$ N·s/m & $k = 6.5$ N/m. Determine la posición y velocidad de la masa en todo tiempo si sobre ésta se aplica una fuerza de excitación $F_e(t) = 5e^{-\frac{12}{13}t}\cos\left(\dfrac{5}{13}t\right)$, a partir de $t = 0$, suponiendo que el sistema estaba en reposo y en su posición de equilibrio.

10. Sobre un sistema masa-resorte de constantes $m = 1$ kg y $k = 100$ N·s/m se aplica una fuerza de excitación $F_e(t) = 2\cos 10t$ durante un lapso de tiempo $0 \le t \le 2\pi$. Suponga que el sistema parte del reposo y de su posición de equilibrio. Determine la posición y velocidad antes y después de $t = 2\pi$.

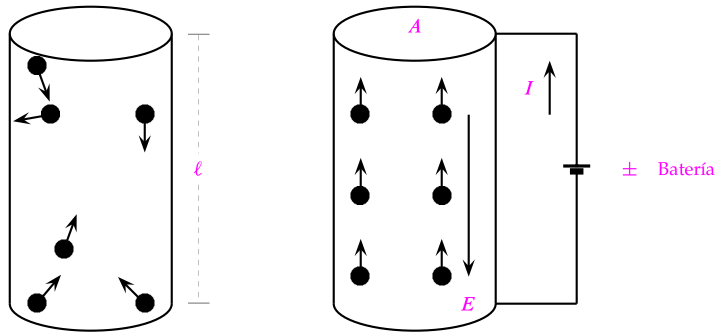
5.3 Circuitos eléctricos

Desde hace más de un siglo, la humanidad ha utilizado en su beneficio la energía eléctrica. Actualmente usamos diferentes aparatos que la necesitan, baste recordar sólo los aparatos electrodomésticos que tenemos en nuestras casas para reconocer que sin ellos nuestra vida sería diferente. La energía eléctrica se transmite de diversas formas, por ejemplo, la instalación eléctrica en nuestras casas transmite la energía por medio de cables de cobre que forman diferentes circuitos. Estos circuitos son los más simples, pero en los aparatos electrónicos (teléfonos celulares, televisiones, etc.) aparecen elementos que almacenan y distribuyen la energía de diversas formas. En esta sección se estudian los conceptos básicos de circuitos y las ED que los modelan. Se inicia con los conceptos de campo eléctrico y diferencia de potencial.

La energía eléctrica se transmite por diversos materiales llamados conductores; estos materiales tienen la propiedad de que cargas eléctricas (electrones o iones positivos) libres circulan por ellos en direcciones aleatorias, como los átomos en un gas confinado, y sólo se mueven en una dirección preferencial cuando se coloca una fuente de voltaje o batería en los extremos del conductor (véase la siguiente figura). En principio esta fuente de voltaje produce una diferencia de potencial V que a su vez produce un campo eléctrico E entre los extremos del conductor, lo que provoca que las cargas Q sean arrastradas en la dirección del campo con una fuerza que experimentalmente es $F = QE$. De forma simple, si la longitud del conductor es ℓ, entonces el campo y la diferencia de potencial se relacionan mediante $E = V/\ell$, de donde la diferencia de potencial está dada por $V = E\ell = F\ell/Q$. Es decir, V se define como la energía necesaria para transportar una distancia ℓ una carga unitaria. En el sistema MKSC [cuyas unidades son metro (m); kilogramo (kg); segundo (s) y coulomb (C)], la unidad del voltaje es el volt (V), que satisface:

$$\text{volt (V)} = \text{joule (J)}/\text{coulomb (C)}.$$

En conclusión, una fuente de voltaje es una fuente de energía eléctrica que provoca que se muevan cargas sobre un conductor. Por comodidad, cuando se hable de potencial nos referiremos a lo que hemos llamado diferencia de potencial.



Cuando se establece el campo eléctrico, las cargas ordenan su movimiento y circulan por el conductor estableciendo una corriente eléctrica I. Si una cantidad de carga dQ cruza una sección transversal del conductor en una fracción de tiempo dt, definimos la intensidad de corriente como:

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Como las cargas pueden ser positivas o negativas, es necesario establecer un signo convencional para la dirección de la corriente; la convención usual es seleccionar ésta como la dirección en que se moverían cargas negativas para un campo eléctrico dado E. Por ejemplo, en el caso de la figura anterior se puede observar que la dirección de la corriente se establece del polo negativo al polo positivo de la batería.
Por otra parte, la unidad de la corriente en el sistema MKSC es el ampere (A); como las unidades de la carga y del tiempo son coulombs (C) y segundos (s), respectivamente, tenemos, de acuerdo con la ecuación anterior:

$$\text{ampere (A)} = \text{coulomb (C)/segundo (s)}.$$

Antes de estudiar propiamente los circuitos eléctricos, necesitamos describir los elementos básicos que los forman; éstos son el resistor, el capacitor y el inductor. Analicemos cada uno de ellos por separado.

Resistor

Un resistor es un dispositivo formado por un material conductor que disipa energía al paso de corriente eléctrica. Si se aplica la misma diferencia de potencial V a los extremos de dos conductores de materiales diferentes, por ejemplo, cobre y aluminio, con la misma geometría (forma y dimensiones), se producen intensidades de corriente I diferentes. La razón se debe a que existe una propiedad de los materiales que se conoce como la resistencia R, que se define experimentalmente por medio de

$$R = \frac{V}{I}. \tag{5.31}$$

Para el caso en que la corriente obtenida sea directamente proporcional a la diferencia de potencial aplicado $I \propto V$, la resistencia R será una constante; los materiales con esta propiedad se llaman materiales óhmicos ya que satisfacen la ley de Ohm:

Ley de Ohm

La intensidad de la corriente eléctrica que circula por un conductor es directamente proporcional a la diferencia de potencial aplicada e inversamente proporcional a la resistencia del mismo.

$$I = \frac{V}{R}.$$

Observe que la expresión (5.31) se cumple siempre independientemente de que el material sea óhmico o no, sólo en el caso de que R sea una constante tendremos que el material cumple con la ley de Ohm. Desde un punto de vista físico, la resistencia depende de las características geométricas del conductor y de una propiedad llamada resistividad ρ. Por ejemplo, en el caso de un conductor cilíndrico como el de la figura anterior, de longitud ℓ y área transversal A, se tiene que la resistencia aumenta directamente con la longitud e inversamente con el área, es decir, la resistencia R satisface:

$$R = \rho \frac{\ell}{A}.$$

En el sistema MKSC, R tiene unidades de ohm (Ω) y de, acuerdo con la expresión $R = \dfrac{V}{I}$, el ohm se define como

$$\text{ohm } (\Omega) = \text{ volt (V)/ampere (A)}.$$

Otro fenómeno que afecta a las resistencias es el efecto Joule. Este efecto establece que una resistencia se calienta y disipa energía en forma de calor cuando se hace circular una corriente por ella. Para determinar la energía disipada, recordamos que la diferencia dU de energía en los extremos de un resistor es

$$dU = V\,dQ = VI\,dt.$$

De forma que la potencia, energía por unidad de tiempo es, entonces:

$$P = \frac{dU}{dt} = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}.$$

Ésta es la base del funcionamiento de las bombillas o focos que producen luz eléctrica. Estos dispositivos están formados por una resistencia al vacío, que se calienta cuando se hace circular una corriente por ella y la energía se disipa en forma de luz.
La unidad utilizada para la potencia es el watt (W), que se define simplemente como

$$\text{watt (W)} = \text{ volt (V)} \cdot \text{ ampere (A)} = \text{ joule (J)/segundo (s)}.$$

Capacitor

Un capacitor es un dispositivo formado por dos conductores; en general, pueden ser de geometrías arbitrarias, pero en nuestro caso consideraremos que ambos conductores son placas colocadas de forma paralela una a la otra y que se encuentran totalmente aisladas. Se dice que el capacitor está cargado cuando una de las placas tiene una carga Q y la otra placa una carga $-Q$, de tal manera que la carga total es cero. Para cargar un capacitor, basta con conectar los extremos de una batería a cada una de las placas que lo forman. Sobre las placas se acumulan cargas de igual magnitud y opuestas. Experimentalmente se encuentra que la carga Q depende directamente de la diferencia de potencial, $Q \propto V$, de tal manera que

$$Q = CV, \tag{5.32}$$

donde C es una constante que recibe el nombre de capacitancia. Al igual que la resistencia, la capacitancia también depende de la geometría de las placas, aunque independientemente de la forma del capacitor siempre se satisface la relación (5.32). En el sistema MKS, C tiene unidades de farad (F) y, de acuerdo con la expresión anterior, el farad se define como

$$\text{farad (F)} = \text{ coulomb (C)/volt (V)}.$$

En la práctica es usual utilizar el microfarad (1μ F = 10^{-6} F) y el picofarad ($1p$ F = 10^{-12} F).
Por otra parte, cuando un capacitor se carga, de alguna forma, también se está almacenando energía; para ver que esto en efecto ocurre, consideremos un elemento diferencial de energía:

$$dU = V\,dQ = \frac{Q}{C}\,dQ.$$

Si integramos esta relación, se obtiene la energía almacenada por un capacitor

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2. \tag{5.33}$$

Inductor

Un inductor es un dispositivo que toma en cuenta el campo magnético generado por la corriente que circula por un conductor. De acuerdo con la experiencia, cuando circula una corriente dependiente del tiempo por un conductor, se genera una diferencia de potencial (también llamada fuerza electromotriz) que depende directamente de la velocidad de variación de la corriente, es decir, $V \propto \dfrac{dI}{dt}$. La constante de proporcionalidad entre estas dos cantidades es precisamente la inductancia L. Tenemos entonces que

$$V = L\frac{dI}{dt}\,. \tag{5.34}$$

Al igual que en el caso de la resistencia y capacitancia, la inductancia es una cantidad que depende de la geometría del conductor. En el sistema MKS, L tiene unidades de henry (H) y de acuerdo con la expresión anterior, el henry se define como

henry (H) = volt (V)· segundo (s)/ampere (A).

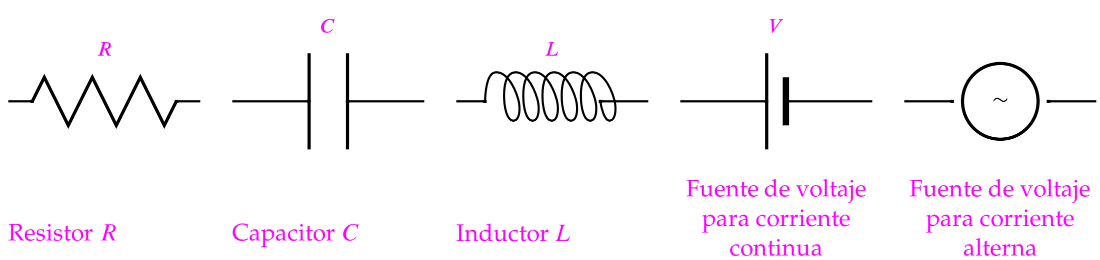
Al igual que los capacitores cargan energía de un campo eléctrico, los inductores cargan energía de un campo magnético. La diferencia dU de energía en los extremos de un inductor es

$$dU = V\,dQ = L\frac{dI}{dt}I\,dt = LI\,dI.$$

Si integramos esta relación, se obtiene la energía almacenada por un inductor

$$U = \frac{LI^2}{2}.$$

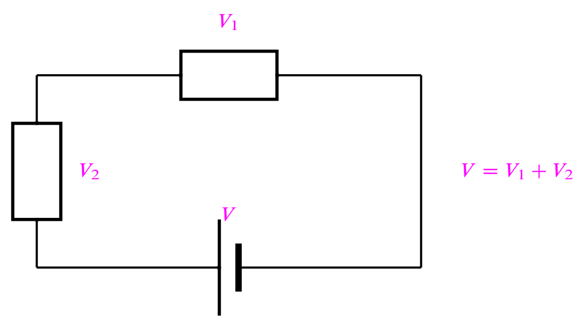
Como conclusión general podemos decir que, cuando circula una corriente por ellos, un resistor disipa RI^2 de energía por el efecto joule, que un capacitor almacena $\frac{1}{2}CV^2$ de energía en forma de carga y que un inductor almacena $\frac{1}{2}LI^2$ de energía en forma de corriente.
En la figura siguiente se muestran las representaciones gráficas para resistores, capacitores, inductores y fuentes de voltaje que se utilizan comúnmente en los circuitos eléctricos.



Antes de empezar nuestro estudio de circuitos mediante ED, necesitamos presentar dos resultados, conocidos como leyes de Kirchhoff de voltaje y de corriente que serán útiles posteriormente.

Ley de Kirchhoff de voltaje

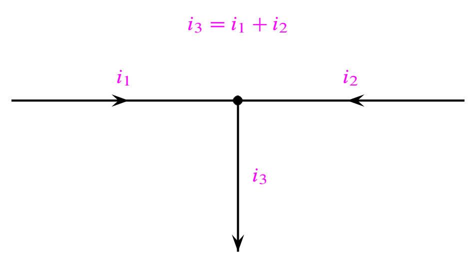
La suma de las caídas de voltaje (diferencias de potencial), a través de los elementos de un circuito en una malla simple (circuito cerrado sin cruces), es igual al voltaje (diferencia de potencial) aplicado.



Esta ley de voltaje es una forma de expresar que la energía se conserva en una malla simple, es decir, que la energía proporcionada como voltaje (energía por unidad de carga) se puede disipar cuando pasa por un resistor o almacenar cuando pasa por un capacitor o un inductor, de suerte que la suma de estas energías es igual a la energía total proporcionada al circuito.

Ley de Kirchhoff de corriente

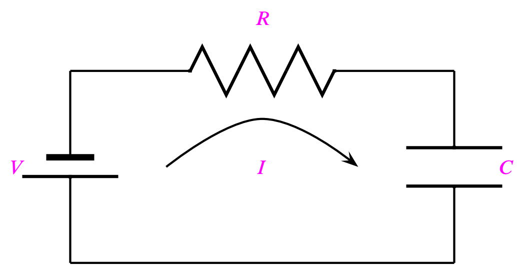
La corriente que entra a un nodo simple (punto donde convergen varias líneas de corriente) es igual a la suma de todas las corrientes que salen de ese nodo.



Esta ley es una consecuencia de la conservación de la carga sobre un circuito. Es decir, si a un nodo llega una carga Q en un intervalo de tiempo Δt entonces esa misma carga debe distribuirse por todas las salidas del nodo, de tal forma que la suma de toda la carga que entra al nodo sea igual a la suma de toda la carga que sale del mismo.

Iniciemos ahora nuestro estudio de circuitos eléctricos. Hay dos tipos que nos interesen: los circuitos de corriente continua, donde la fuente de voltaje es tal que la corriente producida no cambia de dirección en el tiempo, y los circuitos de corriente alterna, donde la corriente cambia de dirección. Generalmente, en el primer caso, la fuente de voltaje produce una diferencia de potencial V constante en el tiempo. Una situación común que ocurre en el segundo caso es cuando la fuente produce un potencial que cambia periódicamente de signo; podemos representar este potencial V mediante una función sinusoidal, es decir: $V = V_0 \cos wt$ donde V_0 es la amplitud del voltaje y w es su frecuencia natural.

5.3.1 Circuito RC de corriente continua



En esta figura se muestra un circuito RC de corriente continua, el cual está formado por una malla simple con una fuente de voltaje V constante, un resistor R y un capacitor C. Cuando se conecta la fuente, las caídas de potencial ocurren en el resistor RI y en el capacitor Q/C. De acuerdo con la ley de Kirchhoff de voltaje, tenemos entonces que

$$V = RI + \frac{Q}{C} = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}.$$

Es decir,

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V, \tag{5.35}$$

la fuente de voltaje proporciona una diferencia de potencial constante V. Resolvemos la ED que resulta. Para esto reescribamos esta ecuación, multiplicando por C, como

$$RC\frac{dQ}{dt} + Q = VC.$$

Separando variables:

$$\frac{dt}{RC} = \frac{dQ}{VC - Q}.$$

Integrando esta última ecuación y considerando la condición inicial de que al tiempo $t = 0$ la carga en el capacitor es cero coulombs, $Q(0) = 0$, obtenemos:

$$\int \frac{dt}{RC} = \int \frac{dQ}{VC - Q} \Rightarrow \frac{t}{RC} = -\ln(VC - Q) + K.$$

Usamos $Q(0) = 0$

$$\frac{0}{RC} = -\ln(VC) + K \Rightarrow K = \ln(VC).$$

De esta manera,

$$\frac{t}{RC} = -\ln(VC - Q) + \ln(VC) = \ln\left(\frac{VC}{VC - Q}\right).$$

Aplicando la función exponencial a ambos miembros, se tiene:

$$e^{\frac{1}{RC}t} = \frac{VC}{VC - Q}.$$

Despejando Q:

$$VC - Q = VCe^{-\frac{1}{RC}t} \Rightarrow Q = VC - VCe^{-\frac{1}{RC}t} = VC\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right).$$

Entonces:

$$Q(t) = VC\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right). \tag{5.36}$$

Y derivando esta última expresión, obtenemos la corriente que circula por el circuito:

$$I(t) = \frac{V}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

A la constante $\tau_c = RC$ se le conoce como constante capacitiva del circuito y su efecto es ampliar o reducir el tiempo de carga del capacitor. Observe que en el tiempo $t = 0$, la carga almacenada en el capacitor es $Q = 0$; en consecuencia no hay caída de potencial sobre el capacitor en ese momento. Con el tiempo el capacitor se carga totalmente con una carga $Q = VC$ y la diferencia de potencial es la proporcionada por la fuente de voltaje. Ocurre exactamente lo contrario en la resistencia, en el tiempo $t = 0$ la corriente es $I = V/R$ y la diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia es exactamente la que proporciona la fuente de potencial. Cuando t crece, la corriente decrece hasta desaparecer; entonces no hay diferencia de potencial en la resistencia.

Ejemplo 5.3.1 *Considere un circuito RC con $R = 120\ \Omega$ y $C = 1/1\,200$ farads (F). Al tiempo $t = 0$ se conecta una fuente de voltaje constante $V = 120$ V. Si inicialmente el capacitor estaba descargado, determine cómo cambia la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito.*

▼ En este caso, la ecuación diferencial que la carga satisface es

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V \;\Rightarrow\; 120 = 120\frac{dQ}{dt} + 1200Q = 120 \;\Rightarrow\; \frac{dQ}{dt} + 10Q = 1. \tag{5.37}$$

Para resolver la ecuación anterior, utilizamos el método de separación de variables; tenemos entonces que

$$dt = \frac{dQ}{1 - 10Q}.$$

Integrando esta ecuación tenemos:

$$t = -\frac{1}{10}\ln(1 - 10Q) + K.$$

Considerando que al tiempo $t = 0$ s la carga en el capacitor es 0 C, $Q(0) = 0$, obtenemos:

$$0 = -\frac{1}{10}\ln[1 - 10(0)] + K \;\Rightarrow\; 0 = -\frac{1}{10}\ln 1 + K \;\Rightarrow\; K = 0.$$

Despejamos la carga Q:

$$t = -\frac{1}{10}\ln(1 - 10Q) \;\Rightarrow\; -10t = \ln(1 - 10Q) \;\Rightarrow\; e^{-10t} = 1 - 10Q,$$

de donde:

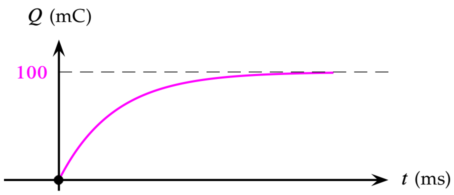
$$Q(t) = 0.1\left(1 - e^{-10t}\right).$$

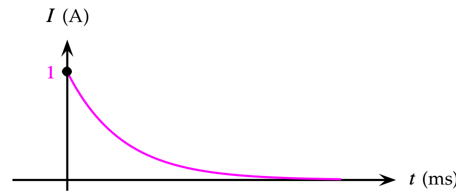
La corriente que circula por el circuito se obtiene derivando la carga, así tenemos:

$$I(t) = e^{-10t}.$$

Observe que la máxima carga del capacitor será $Q = 0.1$ C $= 100$ mC y la mayor corriente será $I = 1$ A.

Las gráficas siguientes muestran tanto el comportamiento de la carga como el de la corriente en el tiempo.





□

Ejemplo 5.3.2 *Considere el circuito RC del ejemplo anterior ($R = 120\ \Omega$ y $C = 1/1\,200$ F). Si se desconecta la fuente cuando la carga es de 8 mC, determine cómo cambia la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito después de desconectar la fuente.*

▼ La ED de la carga es

$$V = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \Rightarrow 0 = 120\frac{dQ}{dt} + 1\,200Q \Rightarrow 0 = \frac{dQ}{dt} + 10Q. \tag{5.38}$$

Separando variables se tiene que

$$-10\,dt = \frac{dQ}{Q}.$$

Integrando esta ecuación tenemos:

$$-10t + K = \ln Q \Rightarrow Q = Ke^{-10t}.$$

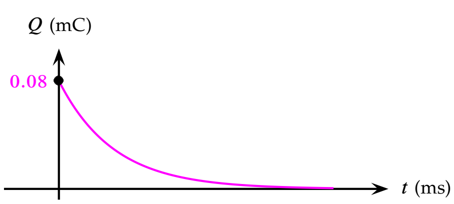
Considerando que al tiempo $t = 0$ s la carga en el capacitor es de 8 mC, $Q(0) = 0.008$, obtenemos que la constante $K = 0.008$. Finalmente hallamos que

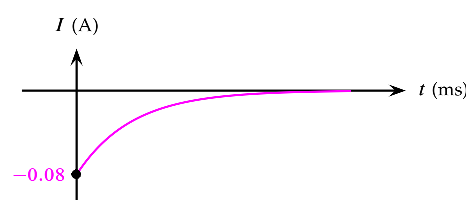
$$Q = 0.008e^{-10t}\ \text{C}.$$

La corriente que circula por el circuito se obtiene derivando la carga, así tenemos:

$$I = -0.08e^{-10t}\ \text{A}.$$

Observe que ahora tanto la carga como la corriente tienden a cero rápidamente. Físicamente la carga que tiene el capacitor sirve para generar una corriente en el circuito que, al cruzar por la resistencia, se disipa en forma de calor. En la figura siguiente se muestra el comportamiento de la carga y la corriente en el tiempo.





□

Ejercicios 5.3.1 *Circuito RC de corriente continua.* *Soluciones en la página 472*

1. Se conecta un resistor $R = 100\ \Omega$ con un capacitor $C = 10^{-3}$ F a una fuente de voltaje directa $V = 50$ V formando un circuito RC. Si inicialmente el capacitor tiene carga $Q_0 = 0$, determine la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito al tiempo t.

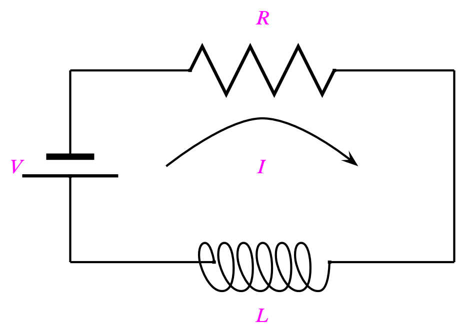
2. Un circuito RC se forma con un resistor $R = 80\ \Omega$, un capacitor $C = 10^{-2}$ F y una fuente de voltaje directa de 100 V. Determinar la carga y la corriente en todo tiempo suponiendo que inicialmente el capacitor tiene carga $Q_0 = 0$.

3. Determinar la carga y la corriente en un circuito RC formado por un resistor $R = 20\ \Omega$, un capacitor $C = 0.04$ F y una fuente de voltaje directa $V = 120$ V. Suponga que, al inicio, la carga del capacitor es de 2 C.

4. Un circuito RC tiene un resistor $R = 40\ \Omega$ y un capacitor $C = 0.002$ F. Suponga que se conectan con una fuente de voltaje $V = 80$ V. Determine la corriente que circula sobre el circuito en todo tiempo, suponiendo que el capacitor tiene una carga inicial de 0.01 C.

5. Una fuente de voltaje de 160 V se conecta a un resistor de 200 Ω y a un capacitor $C = 0.05$ F formando un circuito RC. Suponga que en el tiempo $t = 0$, el capacitor tiene una carga $Q_0 = 3$ C. Determine la carga en el capacitor en todo tiempo.

5.3.2 Circuito RL de corriente continua



En la figura anterior se muestra un circuito RL de corriente continua. Este circuito está formado por una malla simple con una fuente de voltaje V constante, una resistencia R y una inductancia L. Cuando se conecta la fuente, la caída de potencial en la resistencia es RI y en el inductor es $L\dfrac{dI}{dt}$. De acuerdo con la ley de Kirchhoff de voltaje:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V. \tag{5.39}$$

Observe que la ecuación (5.39) y la ecuación (5.35) de la página 324 son similares, sólo es preciso relacionar:

Ecuación (5.39)		Ecuación (5.35)
I	$\longleftrightarrow$	Q
L	$\longleftrightarrow$	R
R	$\longleftrightarrow$	$\dfrac{1}{C}$

Con lo anterior, y usando (5.36), encontramos que la corriente que circula por el circuito está dada por

$$I(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{1}{L/R}t}\right).$$

Derivando con respecto a t esta expresión, se obtiene:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V}{L}e^{-\frac{1}{L/R}t}.$$

Además observe que en el tiempo $t = 0$, la corriente es $I = 0$, y su cambio es máximo dado por $\dfrac{dI}{dt} = \dfrac{V}{L}$. En consecuencia, en $t = 0$, se tiene la máxima caída de potencial sobre el inductor. Cuando el tiempo aumenta, se reduce la caída de potencial hasta desaparecer.

A la constante $\tau_L = \dfrac{L}{R}$ se le conoce como constante inductiva e indica qué tan rápido la corriente pasa a un valor estacionario en un circuito RL.

Ejemplo 5.3.3 *Se conectan un resistor $R = 40\ \Omega$ y un inductor $L = 0.1$ henry (H) en serie con una fuente de voltaje $V = 110$ V. Si originalmente no existe corriente sobre el circuito, determine la corriente en el tiempo.*

▼ La ecuación diferencial para este circuito RL de corriente continua es

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V \;\Rightarrow\; 0.1\frac{dI}{dt} + 40I = 110 \;\Rightarrow\; \frac{dI}{dt} + 400I = 1\,100. \tag{5.40}$$

Separando variables se obtiene:

$$\frac{dI}{1\,100 - 400I} = dt.$$

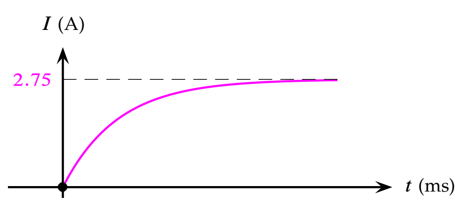
Integrando esta ecuación tenemos:

$$t + C = -\frac{1}{400}\ln(1\,100 - 400I) \;\Rightarrow\; \ln(1\,100 - 400I) = -400t + K \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 1\,100 - 400I = Ke^{-400t} \;\Rightarrow\; I(t) = \frac{11}{4} + Ke^{-400t}.$$

Considerando que al tiempo $t = 0$ s la corriente es de cero amperes, se obtiene $0 = I(0) = \dfrac{11}{4} + K$, de donde $K = -\dfrac{11}{4}$. Finalmente,

$$I(t) = \frac{11}{4}\left(1 - e^{-400t}\right)\ \text{A}.$$

Para tiempos suficientemente grandes, la corriente se acerca a su valor límite $I = 11/4 = 2.75$ A. En la figura siguiente se muestra la corriente en el tiempo. Es notable que en escasos 15 milisegundos (ms) se obtenga una corriente de 2.74318 A, muy cercana al valor límite esperado para el circuito.



□

Ejemplo 5.3.4 *Cuando circula una corriente de 2 A en el ejemplo anterior, se desconecta la fuente de voltaje. Determinar la corriente que circula por el circuito en todo tiempo.*

▼ La ecuación diferencial que modela la corriente en esta situación es

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V \;\Rightarrow\; 0.1\frac{dI}{dt} + 40I = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dI}{dt} + 400I = 0. \tag{5.41}$$

Separando variables:

$$\frac{dI}{I} = -400\,dt.$$

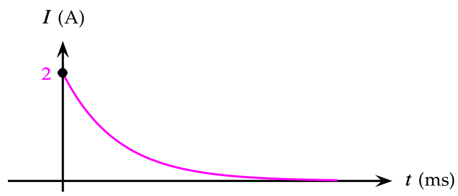
Integrando esta ecuación tenemos:

$$-400t + K = \ln I \;\Rightarrow\; I(t) = Ke^{-400t}.$$

Utilizando la condición inicial $I(0) = 2$ A, se tiene que $K = 2$, de forma que:

$$I(t) = 2e^{-400t}\ \text{A}.$$

La corriente decrece ahora de forma exponencial; esta corriente se establece porque el inductor almacena energía en forma de corriente y, al desconectar la fuente de voltaje, busca eliminar esta energía. En la figura siguiente se muestra la corriente en el tiempo. En sólo 15 ms la corriente cambia de 2 A a 0.005 A, muy cerca ya de desaparecer.

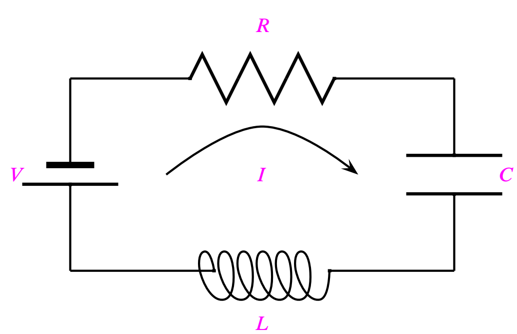


□

Ejercicios 5.3.2 *Circuito RL de corriente continua.* *Soluciones en la página 472*

1. Se conecta en serie un resistor de 10 Ω con un inductor de 2 H y una fuente de voltaje directa de 50 V formando un circuito RL. Determine la corriente en el tiempo t, suponiendo que inicialmente no circula corriente por el circuito. ¿Cuál es la máxima corriente que circula por el circuito? ¿En qué tiempo se alcanza la mitad de la corriente máxima?
2. Un circuito RL en serie está formado por un resistor de 2 Ω, un inductor de 0.5 H y una fuente de voltaje directa $V = 120$ V. Determinar la corriente en el tiempo t si inicialmente circula una corriente de 20 A en el circuito. ¿En qué tiempo se obtiene el 75% de la corriente máxima?
3. Un resistor de 1.2 Ω se conecta con un inductor de 0.01 H en serie. Se coloca además una fuente de voltaje directa $V = 4.8$ V para formar un circuito RL. Determinar la corriente en el tiempo t si inicialmente la corriente que circula por el circuito es de 2 A.
4. Se conecta un resistor de 6.8 Ω en serie con un inductor de 0.1 H. Una fuente de voltaje directa $V = 20$ V suministra energía al circuito. Suponiendo que originalmente circula una corriente de 1 A por el circuito, determinar la corriente en el tiempo t.
5. Un circuito RL está formado por una resistencia de 82 Ω, un inductor de 3 H y una fuente de voltaje $V = 20$ V. Determinar la corriente en el tiempo t si inicialmente no circula corriente por el circuito. ¿Qué ocurre con la corriente si se duplica la fuente de voltaje?

5.3.3 Circuito RLC de corriente continua



Consideremos ahora un circuito formado por un resistor R, un capacitor C y un inductor L conectados en serie con una fuente de voltaje V (véase la figura anterior). De acuerdo con la ley de Kirchhoff de voltaje:

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + RI = V.$$

Como $I = \dfrac{dQ}{dt}$, obtenemos la siguiente ED para la carga:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V(t). \tag{5.42}$$

Derivando esta ED, se obtiene la ecuación diferencial que modela la corriente:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dV}{dt}. \tag{5.43}$$

Con cualquiera de estas dos ecuaciones diferenciales, podemos analizar qué ocurre con la corriente y con la carga en un circuito. Sugerimos, sin embargo, determinar primero la carga del capacitor utilizando la ecuación (5.42) y posteriormente derivar con respecto al tiempo para obtener la corriente en el circuito.
Observe que las ecuaciones diferenciales que gobiernan la carga y la corriente eléctrica en un circuito tienen la misma forma que la ecuación diferencial que describe las vibraciones mecánicas y, en consecuencia, dependiendo de las constantes R, L & C del circuito, se tendrán diferentes tipos de comportamiento de la carga y de la corriente.

Ejemplo 5.3.5 *Se conecta en serie una fuente de voltaje $V = 1.5$ V, una resistencia $R = 20\ \Omega$, un capacitor de 10^{-3} F y un inductor $L = 0.1$ H. Determinar la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito en todo tiempo, si inicialmente el capacitor está totalmente descargado y no fluye corriente sobre el circuito.*

▼ La ecuación diferencial asociada al circuito RLC en serie de este ejemplo es

$$V = L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} \Rightarrow 0.1\frac{dI}{dt} + 20I + 10^3 Q = 1.5 \Rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} + 200\frac{dQ}{dt} + 10^4 Q = 15, \tag{5.44}$$

con las condiciones iniciales $Q(0) = 0$ C & $I(0) = 0$ A. Esta ecuación es similar a la ecuación diferencial de un resorte amortiguado sometido a una fuerza constante externa. La ecuación auxiliar es

$$r^2 + 200r + 10^4 = 0.$$

Cuyas raíces son $r_{1,2} = -100$. Como las raíces son iguales, la solución general de la ecuación homogénea es de la forma

$$Q_h(t) = c_1e^{-100t} + c_2te^{-100t}.$$

Por otra parte, una solución particular es $Q_p(t) = \dfrac{15}{10\,000} = 0.0015$ C. Así que la carga está dada por:

$$Q(t) = Q_p(t) + Q_h(t) = 0.0015 + c_1e^{-100t} + c_2te^{-100t}.$$

Y la corriente por:

$$I(t) = -100c_1e^{-100t} + c_2e^{-100t} - 100c_2te^{-100t}.$$

Usando las condiciones iniciales $Q(0) = 0$, $\quad I(0) = 0$, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$0.0015 + c_1 = 0;$$
$$-100c_1 + c_2 = 0.$$

De donde, $c_1 = -0.0015$, $\quad c_2 = -0.15$. Finalmente, la carga y la corriente son, para tiempos $t \geq 0$,

$$Q(t) = 0.0015 - 0.0015e^{-100t} - 0.15te^{-100t} = 0.0015\left(1 - e^{-100t} - 100te^{-100t}\right) \text{ C};$$
$$I(t) = 15te^{-100t} \text{ A}.$$

Observe que la corriente tiene un máximo cuando $I'(t) = 0$.

$$I'(t) = 15e^{-100t} - 1\,500te^{-100t} = 0 \Rightarrow t = 0.01 \text{ s}.$$

Para $0 \leq t \leq 0.01$, la corriente crece; para $t \geq 0.01$ la corrienete decrece. Por otra parte, la carga es creciente siempre, ya que $t = 0$ es el único tiempo donde $I(t) = Q'(t) = 0$.

□

Ejemplo 5.3.6 *Se conecta en serie una fuente de voltaje $V = 110$ V, un capacitor de 10^{-3} F y un inductor $L = 0.1$ H. Determinar la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito en todo tiempo si inicialmente el capacitor estaba totalmente descargado y no fluía corriente sobre el circuito.*

▼ Para un circuito LC en serie, como el de este ejemplo, la ED asociada es

$$V = L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} \Rightarrow 0.1\frac{dI}{dt} + 10^3 Q = 110 \Rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} + 10^4 Q = 1\,100, \tag{5.45}$$

con las condiciones iniciales $Q(0) = 0$ & $I(0) = 0$ C. Esta ecuación es similar a la ecuación diferencial de un resorte libre sometido a una fuerza constante externa. La ecuación auxiliar es

$$r^2 + 10^4 = 0.$$

Cuyas raíces son $r_{1,2} = \pm 100i$. Como las raíces son complejas, tenemos que la solución a la ecuación homogénea es

$$Q_h(t) = c_1 \cos 100t + c_2 \operatorname{sen} 100t.$$

Por otra parte, una solución particular es $Q_p(t) = \dfrac{1\,100}{10\,000} = 0.11$ C. Así que la carga está dada por

$$Q(t) = Q_p(t) + Q_h(t) = 0.11 + c_1 \cos 100t + c_2 \operatorname{sen} 100t.$$

Y la corriente es

$$I(t) = -100c_1 \operatorname{sen} 100t + 100c_2 \cos 100t.$$

Usando las condiciones iniciales $Q(0) = 0$ & $I(0) = 0$, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 0.11 + c_1 &= 0; \\ 100c_2 &= 0. \end{aligned}$$

De donde $A = -0.11$ & $B = 0$. Finalmente la carga y la corriente son, para tiempos $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} Q(t) &= 0.11\,(1 - \cos 100t)\ \text{C}; \\ I(t) &= 11 \operatorname{sen} 100t\ \text{A}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.3.7 *Determinar la carga en todo tiempo sobre un circuito RLC en serie que satisface a la condición $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$. Consideramos que la fuente de voltaje es constante e igual a V, la carga inicial en el capacitor es cero y no circula corriente en el circuito.*

▼ La ED (5.42) modela este sistema. A pesar de no ser una ED lineal homogénea, se puede convertir en una ED homogénea mediante un cambio de variable $Z = Q - VC$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} &= \frac{dQ}{dt} - \frac{d}{dt}(VC) = \frac{dQ}{dt}. \\ \frac{d^2Z}{dt^2} &= \frac{d^2Q}{dt^2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (5.42):

$$L\frac{d^2Z}{dt^2} + R\frac{dZ}{dt} + \frac{Z + VC}{C} = V,$$

o bien,

$$L\frac{d^2Z}{dt^2} + R\frac{dZ}{dt} + \frac{Z}{C} = 0.$$

La ecuación característica es

$$Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0,$$

cuya solución es

$$r_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\dfrac{L}{C}}}{2L} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Puesto que $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$, el argumento dentro del radical es negativo; entonces la solución para Z es

$$Z = e^{-\frac{R}{2L}t}\left[c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,t\right)\right].$$

Luego, $Z = Q - VC \;\Rightarrow\; Q = VC + Z$, entonces:

$$Q(t) = VC + e^{-\frac{R}{2L}t}\left[c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,t\right)\right].$$

$$I(t) = Q'(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,t\right)\left[-c_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,t\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,t\right)\right] -$$

$$-\frac{R}{2L}e^{-\frac{R}{2L}t}\left[c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,t\right)\right].$$

Considerando que $Q(0) = 0$, se tiene:

$$0 = VC + c_1 \;\Rightarrow\; c_1 = -VC.$$

Considerando que $I(0) = 0$, se tiene la segunda condición:

$$0 = c_2\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} - \frac{Rc_1}{2L} \;\Rightarrow\; c_2 = \frac{Rc_1}{2L\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}} = -\frac{RVC}{2L\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}}.$$

Finalmente,

$$Q(t) = VC - VCe^{-\frac{R}{2L}t}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,t\right) + \frac{R}{2L\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,t\right)\right] \text{C},$$

que corresponde en su símil mecánico a una oscilación amortiguada. Observe que cuando el tiempo aumenta, la carga se estabiliza en $Q = VC$, que físicamente significa que el capacitor con el tiempo se carga totalmente.

□

Ejercicios 5.3.3 *Circuito RLC de corriente continua.* *Soluciones en la página 472*

1. Se conecta en serie un resistor de 12 Ω, un capacitor de 0.1 F, un inductor de 2 H y una fuente de voltaje $V = 20$ V, formando un circuito RLC. Si inicialmente se encuentra descargado el capacitor y no circula corriente por el circuito, determinar en todo tiempo posterior expresiones para la carga y la corriente.

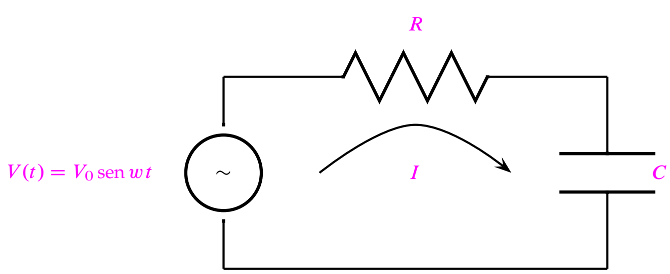
2. Un circuito RLC en serie está formado por un resistor de 4 Ω, un capacitor de 1 F y un inductor de 4 H. Una fuente de voltaje $V = 120$ V suministra energía al circuito. Suponga que inicialmente no circula corriente por el circuito y que el capacitor está descargado. Determinar la corriente que circula en todo tiempo por el circuito. ¿En qué tiempo se obtiene la corriente máxima?

3. Se conecta en serie un resistor de 4 Ω, un capacitor de 0.05 F y un inductor de 0.2 H a una fuente de voltaje $V = 50$ V formando un circuito RLC. Determinar la carga en el capacitor y la corriente por el circuito en el tiempo t si inicialmente la carga es de 2 C y no circula corriente por el circuito. ¿En qué tiempo el capacitor obtiene su mayor carga?

4. Un circuito RLC está formado por un resistor $R = 3.2$ Ω, un inductor $L = 0.4$ H y un capacitor $C = 0.1$ F. Si colocamos una fuente de voltaje directa de 50 V en $t = 0$ s, y la suspendemos en $t = \pi/3$ s, determinar la carga en el capacitor y la corriente sobre el circuito antes y después de $t = \pi/3$ s, suponiendo que inicialmente el capacitor tiene una carga de 5 C y circula una corriente de 12 A.

5. Se conecta en serie un resistor $R = 5$ Ω, un capacitor de 0.04 F, un inductor de 0.5 H y una fuente de voltaje $V = 120$ V. Determinar la carga en el capacitor y la corriente por el circuito en el tiempo t si inicialmente la carga es de 10 C y la corriente de 5 A.

5.3.4 Circuito RC de corriente alterna



En la figura anterior se muestra un circuito RC de corriente alterna; este circuito está formado por una malla simple con una fuente de voltaje $V(t)$ de tipo sinusoidal, un resistor R y un capacitor C. De acuerdo con la ley de Kirchhoff de voltaje, tenemos entonces que la carga satisface a la ecuación diferencial

$$RI + \frac{Q}{C} \Rightarrow R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V_0 \operatorname{sen} wt \Rightarrow \qquad (5.46)$$
$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{V_0}{R}\operatorname{sen} wt.$$

Ésta es una ED lineal no homogénea de primer orden cuyo factor integrante es $e^{\frac{1}{RC}t}$. Obtenemos entonces:

$$e^{\frac{1}{RC}t}\left(\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC}\right) = \frac{V_0}{R}e^{\frac{1}{RC}t}\operatorname{sen} wt \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{\frac{1}{RC}t}Q\right) = \frac{V_0}{R}e^{\frac{1}{RC}t}\operatorname{sen} wt.$$

Si integramos esta última ecuación, obtenemos:

$$e^{\frac{1}{RC}t}Q = \int \frac{V_0}{R}e^{\frac{1}{RC}t}\operatorname{sen} wt\, dt + K \Rightarrow Q = \frac{V_0 e^{-\frac{1}{RC}t}}{R}\int e^{\frac{1}{RC}t}\operatorname{sen} wt\, dt + Ke^{-\frac{1}{RC}t}.$$

Utilizando la formula de integración

$$\int e^{at}\operatorname{sen} bt\, dt = \frac{e^{at}(a\operatorname{sen} bt - b\cos bt)}{a^2+b^2},$$

obtenemos:

$$Q(t) = \frac{V_0 e^{-\frac{1}{RC}t}}{R}\left[\frac{e^{\frac{1}{RC}t}\left(\frac{1}{RC}\operatorname{sen} wt - w\cos wt\right)}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + w^2}\right] + Ke^{-\frac{1}{RC}t}. \tag{5.47}$$

Usando la condición $Q(0) = 0$, hallamos que

$$0 = \frac{V_0}{R}\left[\frac{-w}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + w^2}\right] + K \;\Rightarrow\; K = \frac{V_0}{R}\left[\frac{w}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + w^2}\right].$$

Sustituyendo K en (5.47) y simplificando tenemos:

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{V_0}{R\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + Rw^2}\left[\frac{1}{RC}\operatorname{sen} wt - w\cos wt + we^{-\frac{1}{RC}t}\right] = \\ &= \frac{V_0RC^2}{1 + R^2C^2w^2}\left[\frac{1}{RC}\operatorname{sen} wt - w\cos wt + we^{-\frac{1}{RC}t}\right]. \end{aligned} \tag{5.48}$$

Observe que, con el tiempo, se obtiene una expresión para $Q(t)$ donde no aparece el término exponencial, es decir, para $t \to \infty$, obtenemos la carga de estado estable dada por:

$$Q(t) = \frac{V_0}{R\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + Rw^2}\left[\frac{1}{RC}\operatorname{sen} wt - w\cos wt\right],$$

que se puede escribir como:

$$Q(t) = \frac{V_0}{R\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + w^2}}\operatorname{sen}(wt + \phi).$$

Donde el ángulo de fase ϕ satisface:

$$\cos\phi = \frac{\frac{1}{RC}}{\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + w^2}}, \quad \operatorname{sen}\phi = -\frac{w}{\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + w^2}} \quad \& \tan\phi = -wRC.$$

Es decir, la carga es una función sinusoidal de la misma frecuencia que el voltaje de entrada. De hecho la corriente sólo estará desfasada un ángulo ϕ del voltaje de entrada. La corriente está dada por

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{wV_0}{R\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + w^2}}\cos(wt + \phi).$$

Ejemplo 5.3.8 *Determinar la carga que se almacena en un capacitor de un circuito RC de corriente alterna si $R = 12\ \Omega$, $C = 1/1\,200$ F, $V = 110\cos 60t$ V, e inicialmente el capacitor no tiene carga.*

▼ La ecuación diferencial que modela la carga es

$$V = RI + \frac{Q}{C} \;\Rightarrow\; 12\frac{dQ}{dt} + 1\,200Q = 110\cos 60t \;\Rightarrow\; \frac{dQ}{dt} + 100Q = \frac{110}{12}\cos 60t. \tag{5.49}$$

Ésta es una ED lineal no homogénea con la condición inicial $Q(0) = 0$ C. Esta ED corresponde al caso de un resorte forzado no amortiguado. El factor integrante es $e^{\int 100\,dt} = e^{100t}$. Aplicando el método conocido:

$$e^{100t}\left(\frac{dQ}{dt} + 100Q\right) = \frac{110}{12}e^{100t}\cos 60t \;\Rightarrow\; \frac{d\left(Qe^{100t}\right)}{dt} = \frac{110}{12}e^{100t}\cos 60t \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow Qe^{100t} = \frac{110}{12}\int e^{100t}\cos 60t\,dt.$$

Si usamos la fórmula de integración

$$\int e^{at}\cos bt = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2}(a\cos bt + b\,\mathrm{sen}\,bt),$$

obtenemos:

$$Qe^{100t} = \left(\frac{110}{12}\right)\left(\frac{e^{100t}}{100^2 + 60^2}\right)(100\cos 60t + 60\,\mathrm{sen}\,60t) + K,$$

de donde

$$Q(t) = \left(\frac{11}{16\,320}\right)(100\cos 60t + 60\,\mathrm{sen}\,60t) + Ke^{-100t}.$$

Usando $Q(0) = 0$, obtenemos que $0 = Q(0) = \left(\dfrac{1\,100}{16\,320}\right) + K$, de donde $K = -\dfrac{1\,100}{16\,320} = -\dfrac{110}{1\,632}$. Finalmente, la carga y la corriente son, para tiempos $t \geq 0$,

$$Q(t) = \frac{11}{1\,632}(10\cos 60t + 6\,\mathrm{sen}\,60t) - \frac{110}{1\,632}e^{-100t}\ \mathrm{C};$$
$$I(t) = \frac{660}{1\,632}(-10\,\mathrm{sen}\,60t + 6\cos 60t) + \frac{11\,000}{1\,632}e^{-100t}\ \mathrm{A}.$$

Vemos que los términos exponenciales son transitorios porque desaparecen rápidamente. En el caso de la carga, con el tiempo queda el término del estado estable:

$$Q(t) = \frac{11}{1\,632}(10\cos 60t + 6\,\mathrm{sen}\,60t)\ \mathrm{C},$$

que puede reescribirse como

$$Q(t) = \frac{11}{1\,632}\sqrt{10^2 + 6^2}\left(\frac{10}{\sqrt{10^2 + 6^2}}\cos 60t + \frac{6}{\sqrt{10^2 + 6^2}}\,\mathrm{sen}\,60t\right) =$$
$$= \frac{11}{24\sqrt{34}}(\mathrm{sen}\,\phi\cos 60t + \cos\phi\,\mathrm{sen}\,60t) = \frac{11}{24\sqrt{34}}\,\mathrm{sen}(60t + \phi).$$

Donde hemos utilizado la identidad

$$\mathrm{sen}(a + b) = \mathrm{sen}\,a\cos b + \cos a\,\mathrm{sen}\,b.$$

e identificado el ángulo fase como aquel que satisface:

$$\mathrm{sen}\,\phi = \frac{10}{\sqrt{10^2 + 6^2}}; \quad \cos\phi = \frac{6}{\sqrt{10^2 + 6^2}}; \quad \tan\phi = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

Se tiene $\phi = \phi_c = \arctan\dfrac{5}{3} \approx 1.0304$. Observe que la funciones de carga y voltaje están desfasadas entre sí un ángulo $\dfrac{\pi}{2} - \phi$. En efecto:

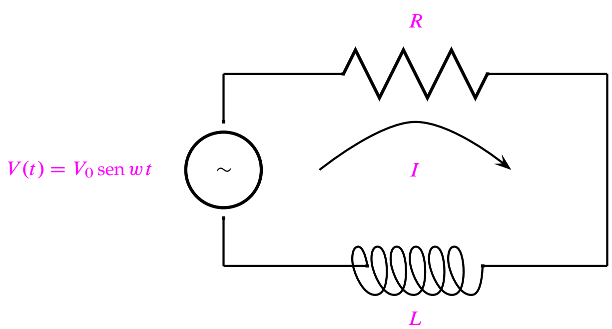
$$\mathrm{sen}\left[(60t + \phi) + \left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\right] = \mathrm{sen}\left(60t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 60t.$$

□

Ejercicios 5.3.4 *Circuito RC de corriente alterna.* *Soluciones en la página 473*

1. Se conecta una fuente de voltaje alterno de $120\cos(60\pi t)$ V a un circuito RC. Suponiendo que $R = 60\ \Omega$, $C = 0.02$ F y que inicialmente el capacitor está descargado, determinar la carga y la corriente al tiempo t.
2. Se conecta un resistor de 100 Ω con un capacitor de 0.001 F y con una fuente de voltaje alterna $V(t) = 120\cos 5t$ V, formando un circuito RC. Si inicialmente el capacitor no tiene carga, determine una expresión para la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito al tiempo t.
3. Una resistencia de 25 Ω, un capacitor de 0.02 F y una fuente de voltaje $V(t) = 125\cos 5t + 100\,\text{sen}\,2t$ V se conectan en serie . Suponga que al tiempo $t = 0$ s la carga del capacitor es $Q = 1$ C; encuentre una expresión para la carga del capacitor al tiempo t.
4. Un circuito RC está formado por una resistor de 20 Ω, un capacitor de 0.001 F y una fuente de voltaje alterno $V(t) = 100\cos 50t$ V. Si originalmente la carga en el capacitor es de 20 C, determine la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito al tiempo t.
5. Un circuito RC se forma con un resistor de 200 Ω, un capacitor de 0.01 F y una fuente de voltaje $V(t) = 100e^{-3t}\cos 4t$ V. Determinar la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito al tiempo t, suponiendo que $Q(0) = 20$ C.

5.3.5 Circuito RL de corriente alterna



El circuito de la figura anterior está formado por una malla simple con una fuente de voltaje $V(t)$ de tipo sinusoidal, un resistor R y un inductor L y se le conoce como circuito RL de corriente alterna. De acuerdo con la ley de Kirchhoff de voltaje, tenemos que

$$V_0\,\text{sen}\,wt = RI + L\frac{dI}{dt} \Rightarrow L\frac{dI}{dt} + RI = V_0\,\text{sen}\,wt \Rightarrow \tag{5.50}$$
$$\Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{RI}{L} = \frac{V_0}{L}\,\text{sen}\,wt.$$

Observe que esta ecuación (5.50) es similar a la ecuación (5.46) página 333, si hacemos las relaciones:

Ecuación (5.46)		Ecuación (5.50)
Q	$\longleftrightarrow$	I
R	$\longleftrightarrow$	L
$\dfrac{1}{C}$	$\longleftrightarrow$	R

Así obtenemos, de la solución (5.48), que la corriente que circula sobre el circuito está dada por

$$I(t) = \frac{V_0}{L\left(\frac{R}{L}\right)^2 + Lw^2}\left[\frac{R}{L}\operatorname{sen} wt - w\cos wt + we^{-\frac{R}{L}t}\right] =$$

$$= \frac{V_0 L}{R^2 + L^2w^2}\left[\frac{R}{L}\operatorname{sen} wt - w\cos wt + we^{-\frac{R}{L}t}\right].$$

Que se puede reescribir como

$$I(t) = \frac{V_0 Lwe^{-\frac{R}{L}t}}{R^2 + L^2w^2} + \frac{\frac{V_0}{L}}{\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + w^2}}\operatorname{sen}(wt + \phi).$$

Donde el ángulo de fase ϕ satisface:

$$\cos\phi = \frac{\frac{R}{L}}{\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + w^2}}, \quad \operatorname{sen}\phi = -\frac{w}{\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + w^2}} \quad \& \ \tan\phi = -\frac{wL}{R}.$$

Observe que, para tiempos grandes, la corriente que circula por el circuito tiene la misma frecuencia que el voltaje de entrada.

Ejemplo 5.3.9 *Determinar la corriente en un circuito RL de corriente alterna si $R = 1\ \Omega$, $L = 0.01\ H$ y $V = \cos 60t\ V$. Suponga que inicialmente no circula corriente por el circuito.*

▼ La ecuación diferencial para este ejemplo es

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V(t) \Rightarrow 0.01\frac{dI}{dt} + I = \cos 60t \Rightarrow \frac{dI}{dt} + 100I = 100\cos 60t.$$

Multiplicamos por el factor integrante $\mu = e^{100t}$ ambos lados para obtener:

$$\frac{d\left(e^{100t}I\right)}{dt} = 100e^{100t}\cos 60t \Rightarrow e^{100t}I = 100\int e^{100t}\cos 60t\,dt.$$

Utilizando la relación:

$$\int e^{at}\cos bt\,dt = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2}(a\cos bt + b\operatorname{sen} bt),$$

obtenemos el resultado

$$e^{100t}I = \frac{100e^{100t}}{100^2 + 60^2}(100\cos 60t + 60\operatorname{sen} 60t) + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{100}{100^2 + 60^2}(100\cos 60t + 60\operatorname{sen} 60t) + Ke^{-100t}.$$

Si al tiempo $t = 0$ no hay corriente, entonces:

$$0 = \frac{100}{100^2 + 60^2}(100) + K \Rightarrow K = -\frac{10^4}{100^2 + 60^2}.$$

Finalmente, la corriente está dada por

$$I(t) = \frac{100}{100^2 + 60^2}(100\cos 60t + 60\operatorname{sen} 60t - 100e^{-100t}) =$$

$$= \frac{25}{34}\cos 60t + \frac{15}{34}\operatorname{sen} 60t - \frac{25}{34}e^{-100t} \text{ amperes.}$$

□

Ejercicios 5.3.5 *Circuito RL de corriente alterna.* *Soluciones en la página 473*

1. Se conectan en serie un resistor de 30 Ω y un inductor de 0.1 H a una fuente de voltaje alterna que suministra $V(t) = 100\cos 400t$ V. Si inicialmente no circula corriente por el circuito, determine una expresión para la corriente en el tiempo t.

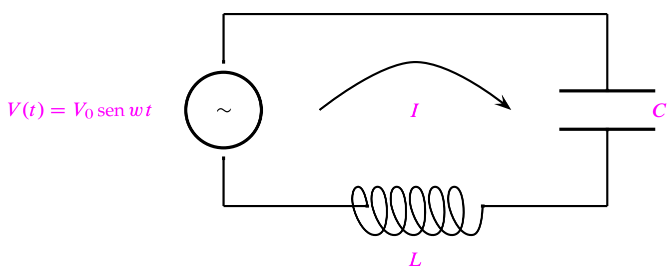
2. Un circuito RL está formado por un resistor de 10 Ω, un inductor de 0.02 H y una fuente de voltaje alterna que suministra $V(t) = 120\cos 500t$ V. Determine la corriente que circula por el circuito suponiendo que originalmente no hay corriente alguna.

3. Un resistor de 25 Ω, un inductor de 0.5 H y una fuente de voltaje alterna $V(t) = 12\cos 50t + 10\,\text{sen}\,20t$ V se conectan formando un circuito RL. Si inicialmente circula una corriente de 1 A, determine la corriente que circula en el tiempo t.

4. Un circuito en serie está formado por un resistor $R = 20$ Ω, un inductor $L = 0.05$ H y una fuente de voltaje que suministra $V(t) = 80\cos 100t$ V. Suponga que originalmente circula una corriente de 4 A. ¿Cuál será la corriente al tiempo t?

5. Se conecta un resistor de 2 Ω y un inductor de 0.25 H a una fuente de voltaje alterna que suministra $V(t) = 25e^{-5t}\cos 12t$ V formando un circuito RL. Suponga que la fuente se conecta cuando circula por el circuito una corriente de 5 A. Determine la corriente que circula en el tiempo t.

5.3.6 Circuito LC de corriente alterna



Un circuito LC simple de corriente alterna, como el de la figura anterior, está formado por una fuente de voltaje $V(t)$, un capacitor C y un inductor L. Las caídas de potencial en el circuito son Q/C sobre el capacitor y $L\dfrac{dI}{dt}$ sobre el inductor. De acuerdo con la ley de Kirchhoff de voltaje, tenemos que

$$V_0\,\text{sen}\,wt = \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{LC} = \frac{V_0}{L}\,\text{sen}\,wt. \tag{5.51}$$

Si definimos

$$w_{LC} = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

podemos reescribir la ecuación (5.51) como:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + w_{LC}^2 Q = \frac{V_0}{L}\,\text{sen}\,wt, \tag{5.52}$$

cuya solución depende de si la frecuencia w del voltaje de entrada es igual o diferente a la frecuencia natural w_{LC}.

Caso i. Si $w_{LC} \neq w$, la solución está dada por $Q(t) = Q_h(t) + Q_p(t)$ donde

$$Q_h(t) = c_1 \cos w_{LC}t + c_2 \operatorname{sen} w_{LC}t,$$

es la solución general de la ecuación homogénea y

$$Q_p(t) = D \operatorname{sen} wt,$$

es una solución particular. Para obtener el coeficiente D, derivamos dos veces $Q_p(t)$ y sustituimos en la ecuación (5.52), así resulta que

$$\left(-w^2 + w_{LC}^2\right) D \operatorname{sen} wt = \frac{V_0}{L} \operatorname{sen} wt,$$

de donde se infiere que

$$D = \frac{V_0}{L\left(w_{LC}^2 - w^2\right)} \;\Rightarrow\; Q_p(t) = \frac{V_0}{L\left(w_{LC}^2 - w^2\right)} \operatorname{sen} wt.$$

Finalmente,

$$Q(t) = c_1 \cos w_{LC}t + c_2 \operatorname{sen} w_{LC}t + \frac{V_0}{L\left(w_{LC}^2 - w^2\right)} \operatorname{sen} wt.$$

Los coeficientes c_1, c_2 se obtienen al considerar las condiciones iniciales; por ejemplo, $Q(0) = 0$ & $I(0) = 0$. Evaluando la carga al tiempo $t = 0$ se tiene que $c_1 = 0$. Derivando con respecto al tiempo, obtenemos la corriente por el circuito:

$$I(t) = c_2 w_{LC} \cos(w_{LC}t) + \frac{V_0 w}{L\left(w_{LC}^2 - w^2\right)} \cos(wt),$$

y evaluando en $t = 0$ tenemos que

$$0 = c_2 w_{LC} + \frac{V_0 w}{L\left(w_{LC}^2 - w^2\right)} \;\Rightarrow\; c_2 = -\frac{V_0 w}{L w_{LC}\left(w_{LC}^2 - w^2\right)}.$$

La carga y la corriente son, entonces:

$$\begin{aligned} Q(t) &= -\frac{V_0 w}{L w_{LC}\left(w_{LC}^2 - w^2\right)} \operatorname{sen} w_{LC}t + \frac{V_0}{L\left(w_{LC}^2 - w^2\right)} \operatorname{sen} wt; \\ I(t) &= \frac{V_0 w}{L\left(w_{LC}^2 - w^2\right)} \left[\cos wt - \cos w_{LC}t\right]. \end{aligned}$$

Observe que la carga y la corriente dependen de la frecuencia del voltaje de entrada y de la frecuencia natural w_{LC}.

Caso ii. En un circuito LC, cuando $w_{LC} = w$, la carga está dada por

$$Q(t) = Q_h(t) + Q_p(t),$$

donde

$$Q_h(t) = c_1 \cos w_{LC}t + c_2 \operatorname{sen} w_{LC}t$$

es la solución general de la ecuación homogénea y de acuerdo con el método de coeficientes indeterminados, y donde

$$Q_p(t) = Dt \operatorname{sen} w_{LC}t + Et \cos w_{LC}t$$

es una solución particular. Para obtener los coeficientes D y E, derivamos dos veces $Q_p(t)$ y sustituimos en la ecuación (5.52); así resulta

$$\begin{aligned} \frac{V_0}{L} \operatorname{sen} w_{LC}t &= 2D w_{LC} \cos w_{LC}t - 2E w_{LC} \operatorname{sen} w_{LC}t - Dt w_{LC}^2 \operatorname{sen} w_{LC}t - Et w_{LC}^2 \cos w_{LC}t + \\ &+ w_{LC}^2 \left[Dt \operatorname{sen} w_{LC}t + Et \cos w_{LC}t\right] = 2D w_{LC} \cos w_{LC}t - 2E w_{LC} \operatorname{sen} w_{LC}t, \end{aligned}$$

de donde se infiere que
$$D = 0 \quad \& \quad E = -\frac{V_0}{2w_{LC}L}.$$

Por lo que se obtiene, finalmente:
$$Q_p(t) = -\frac{V_0 t}{2w_{LC}L}\cos w_{LC}t.$$

En consecuencia:
$$Q(t) = c_1\cos w_{LC}t + c_2\operatorname{sen} w_{LC}t - \frac{V_0 t}{2w_{LC}L}\cos w_{LC}t.$$

Los coeficientes c_1, c_2 se obtienen al considerar las condiciones iniciales, por ejemplo, $Q(0) = 0$ & $I(0) = 0$. Evaluando la carga al tiempo $t = 0$, se tiene que $c_1 = 0$. Derivando con respecto al tiempo, obtenemos la corriente sobre el circuito
$$I(t) = c_2 w_{LC}\cos w_{LC}t - \frac{V_0}{2w_{LC}L}\cos w_{LC}t + \frac{V_0 t}{2L}\operatorname{sen} w_{LC}t.$$

y evaluando en $t = 0$ tenemos que
$$0 = c_2 w_{LC} - \frac{V_0}{2w_{LC}L} \;\Rightarrow\; c_2 = \frac{V_0}{2Lw_{LC}^2}.$$

La carga y la corriente son, entonces:
$$Q(t) = \frac{V_0}{2Lw_{LC}^2}\operatorname{sen} w_{LC}t - \frac{V_0 t}{2w_{LC}L}\cos w_{LC}t \text{ C};$$
$$I(t) = \frac{V_0 t}{2L}\operatorname{sen} w_{LC}t \text{ A}.$$

Estas expresiones muestran que en un circuito LC puede existir resonancia y que la carga en el capacitor así como la corriente oscilarán con gran amplitud. Desde luego, esto provocará que en algún momento un elemento del circuito se dañe y en consecuencia deje de funcionar el circuito.

Ejemplo 5.3.10 *Considere un circuito LC de corriente alterna con $L = 1$ H, $C = 0.25$ F y una fuente de voltaje $V = 20\cos 2t$ V. Determine la corriente y la carga al tiempo $t \geq 0$ si inicialmente ambas son cero.*

▼ La ecuación diferencial por resolver [véase la ecuación (5.51)] es
$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 4Q = 20\cos 2t.$$

La solución de la ED homogénea es
$$Q_h(t) = c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen} 2t.$$

Como la frecuencia de la fuente de voltaje es igual a la frecuencia natural de las funciones sinusoidales, proponemos entonces la solución particular:
$$Q_p(t) = t\left[A\cos 2t + B\operatorname{sen} 2t\right].$$

Derivando dos veces se tiene:
$$\frac{dQ_p}{dt} = A\cos 2t + B\operatorname{sen} 2t + t\left[-2A\operatorname{sen} 2t + 2B\cos 2t\right];$$
$$\frac{d^2Q_p}{dt^2} = -4A\operatorname{sen} 2t + 4B\cos 2t + t\left[-4A\cos 2t - 4B\operatorname{sen} 2t\right].$$

Sustituyendo la función $Q_p(t)$ y la segunda derivada en la ecuación diferencial:

$$-4A \operatorname{sen} 2t + 4B \cos 2t = 20 \cos 2t,$$

de donde se deduce que

$$A = 0 \quad \& \quad B = 5.$$

Finalmente, la solución particular y la solución general son

$$Q_p(t) = 5t \operatorname{sen} 2t;$$
$$Q(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + 5t \operatorname{sen} 2t.$$

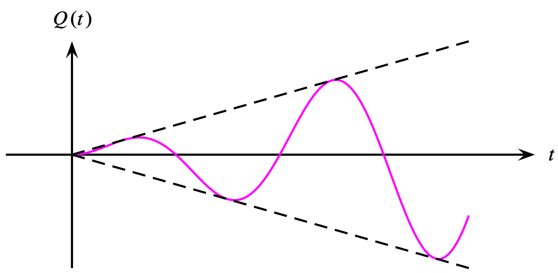
La corriente se obtiene derivando la expresión anterior:

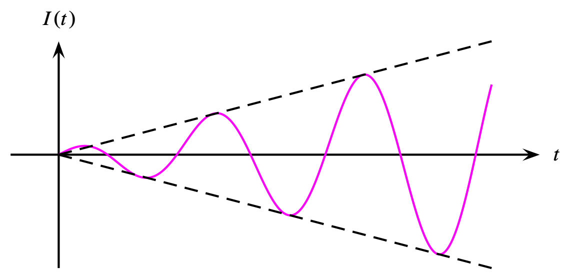
$$I(t) = -2c_1 \operatorname{sen} 2t + 2c_2 \cos 2t + 5 \operatorname{sen} 2t + 10t \cos 2t.$$

Considerando las condiciones iniciales, $c_1 = c_2 = 0$. Entonces la carga y la corriente están dadas por

$$Q(t) = 5t \operatorname{sen} 2t;$$
$$I(t) = 5 \operatorname{sen} 2t + 10t \cos 2t.$$

Ambas funciones se grafican a continuación:





Observe que la carga sobre el capacitor crece y decrece con amplitud cada vez más grande; por esta razón en algún momento el circuito dejará de funcionar. Lo mismo sucede con la corriente en el circuito.

□

Ejercicios 5.3.6 *Circuito LC de corriente alterna.* *Soluciones en la página 473*

1. Se conecta en serie un capacitor de 0.01 F, un inductor de 0.01 H y una fuente de voltaje que suministra $10 \cos(10t)$ V para formar un circuito LC. Determine una expresión para la carga y la corriente en todo tiempo t, suponiendo que inicialmente el capacitor estaba descargado y que no circulaba corriente alguna en el circuito.

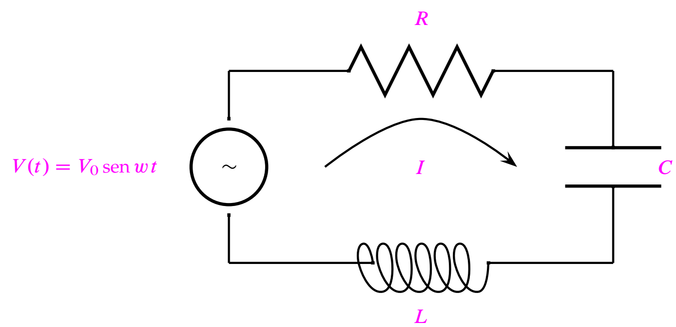
2. Un circuito LC se forma conectando un capacitor de 0.4 F, un inductor de 0.004 H y una fuente de voltaje que proporciona $2 \cos 20t$ V. Si al inicio el capacitor tenía una carga de 0.01 C y circulaba una corriente de 0.05 A, encuentre la carga al tiempo t segundos.

3. Se conecta una fuente de voltaje que provee $10 \cos 20t$ V a un circuito LC formado por un capacitor de 0.5 F y un inductor de 0.005 H. Suponiendo que el capacitor se encontraba descargado y no circulaba corriente sobre el circuito, encuentre la carga y la corriente.

4. Un circuito LC está formado por una fuente de voltaje que suministra $2 \cos 50t$ V, un capacitor de 0.2 F y un inductor de 0.002 H. Determine la carga y la corriente sobre el circuito suponiendo que al inicio el capacitor tenía una carga de 4 C y circulaba una corriente de 50 A.

5. Se aplica un voltaje de $10 \cos 100t$ V durante $\pi/200$ s a un circuito LC formado por un capacitor de 0.1 F y un inductor de 0.001 H e inmediatamente después se suspende. Determine la carga y la corriente sobre el circuito en todo tiempo t suponiendo que originalmente el capacitor se encontraba descargado y no circulaba corriente sobre el circuito.

5.3.7 Circuito RLC de corriente alterna



El último circuito que estudiaremos es el circuito RLC de corriente alterna (véase la figura anterior). En este caso la ecuación que modela la carga en el circuito es exactamente la ecuación (5.42), con $V(t) = V_0 \operatorname{sen}(wt)$. La ecuación que modela la carga es

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0 \operatorname{sen} wt. \tag{5.53}$$

Esta ecuación es equivalente a la ecuación de vibraciones amortiguadas forzadas que estudiamos en una sección previa. Nuevamente existen diferentes posibilidades de la solución dependiendo del valor de los coeficientes R, L y C que aparecen en la ecuación.

Ejemplo 5.3.11 *Un circuito RLC de corriente alterna está formado por los siguientes elementos: una resistencia de* 4 Ω, *un capacitor de* 4 *mF, un inductor de* 25 *mH y un fuente de voltaje* $V = 110\cos 60t$ *V. Determinar la carga y la corriente en todo tiempo si inicialmente la carga sobre el capacitor es cero y no fluye corriente por el circuito.*

▼ La ecuación diferencial asociada al circuito RLC en serie de este ejemplo es

$$\begin{aligned} &V = L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} \Rightarrow 0.025\frac{dI}{dt} + 4I + 250Q = 110\cos 60t \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} + 160\frac{dQ}{dt} + 10^4 Q = 4400\cos 60t, \end{aligned} \tag{5.54}$$

con las condiciones iniciales $Q(0) = 0$ C y con $I(0) = 0$ A. Esta ecuación se corresponde con un oscilador amortiguado y forzado. La ecuación auxiliar es

$$r^2 + 160r + 10^4 = 0.$$

Cuyas raíces son $r_{1,2} = -80 \pm 60i$. Como las raíces son complejas, la solución a la ecuación homogénea es de la forma

$$Q_h(t) = c_1 e^{-80t}\cos 60t + c_2 e^{-80t}\operatorname{sen} 60t.$$

Por otra parte, como la frecuencia de la fuente de voltaje no es igual a ninguna de la raíces de la ecuación auxiliar, la solución particular tiene la forma

$$Q_p(t) = A\cos 60t + B\operatorname{sen} 60t.$$

Derivando una y dos veces con respecto al tiempo, y después sustituyendo en la ecuación diferencial (5.54) obtenemos que

$$\begin{aligned} &-3\,600A\cos 60t - 3600B\operatorname{sen} 60t + \\ &+ 160\,(60B\cos 60t - 60A\operatorname{sen} 60t) + \\ &+ 10^4\,(A\cos 60t + B\operatorname{sen} 60t) = 4\,400\cos 60t. \end{aligned}$$

Simplificando resulta:

$$3\,200[(2A + 3B)\cos 60t + (2B - 3A)\operatorname{sen} 60t] = 4\,400\cos 60t.$$

De aquí se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$3\,200(2A + 3B) = 4\,400;$$
$$2B - 3A = 0.$$

Y su solución es $A = \dfrac{11}{52}$ & $B = \dfrac{33}{104}$. Finalmente, la solución particular es

$$Q_p(t) = \frac{11}{52}\cos 60t + \frac{33}{104}\operatorname{sen} 60t.$$

La carga está dada entonces por

$$Q(t) = Q_p(t) + Q_h(t) = \frac{11}{52}\cos 60t + \frac{33}{104}\operatorname{sen} 60t + c_1e^{-80t}\cos 60t + c_2e^{-80t}\operatorname{sen} 60t.$$

Derivando se obtiene la corriente en el tiempo

$$I(t) = e^{-80t}\cos 60t\,(-80c_1 + 60c_2) - e^{-80t}\operatorname{sen} 60t\,(80c_2 + 60c_1) + \frac{495}{26}\cos 60t - \frac{165}{13}\operatorname{sen} 60t.$$

En el tiempo $t = 0$, las condiciones iniciales implican que

$$0 = Q(0) = \frac{11}{52} + c_1;$$
$$0 = I(0) = -80c_1 + 60c_2 + \frac{495}{26}.$$

Del sistema anterior, la solución es $c_1 = -\dfrac{11}{52}$ & $c_2 = -\dfrac{187}{312}$. Finalmente, la carga y la corriente son, para tiempos $t \geq 0$,

$$Q(t) = \frac{11}{52}\cos 60t + \frac{33}{104}\operatorname{sen} 60t - \frac{11}{52}e^{-80t}\cos 60t - \frac{187}{312}e^{-80t}\operatorname{sen} 60t \text{ C};$$
$$I(t) = -\frac{495}{26}e^{-80t}\cos 60t + \frac{2\,365}{39}e^{-80t}\operatorname{sen} 60t + \frac{495}{26}\cos 60t - \frac{165}{13}\operatorname{sen} 60t \text{ A}.$$

Observe nuevamente que tenemos términos transitorios los cuales desaparecen en el tiempo. La carga y la corriente que permanecen tienen la misma frecuencia que la fuente de voltaje y sólo se encuentran desfasadas.

□

Ejercicios 5.3.7 *Circuito RLC de corriente alterna.* *Soluciones en la página 474*

1. Un circuito RLC está formado por un resistor $R = 12\ \Omega$, un capacitor $C = 0.1$ F y un inductor $L = 2$ H. Se conecta una fuente de voltaje que suministra $20\cos 5t$ V. Si inicialmente el capacitor está descargado y no circula corriente alguna por el circuito, encuentre una expresión para la carga y la corriente en todo tiempo t.

2. Se conecta en serie un resistor $R = 4\ \Omega$, un capacitor $C = 1$ F y un inductor $L = 4$ H, a una fuente de voltaje de corriente alterna $V(t) = 100\cos t$ V. Determinar la carga en el capacitor y la corriente sobre el circuito en el tiempo t, si originalmente el capacitor está descargado y la corriente es de 6 A.

3. Se conectan en serie un resistor $R = 4\,\Omega$, un capacitor $C = 0.05$ F, un inductor de $L = 0.2$ H y una fuente de voltaje alterna que suministra $120\cos 6t$ V. Determinar la carga en el capacitor y la corriente sobre el circuito en el tiempo t si originalmente la carga es de 2 C y no circula corriente.

4. Un circuito RLC con constantes $L = 0.4$ H, $R = 3.2\ \Omega$ y $C = 0.1$ F se conecta a una fuente de voltaje que proporciona $20\cos 3t$ V. ¿Cuál será la carga en el capacitor y la corriente por el circuito si al conectar la fuente, el capacitor tiene una carga de 5 C y circula una corriente de 12 A?

5.3.8 Relación electromecánica

Como colofón de esta sección, comentaremos que existe una relación entre las ecuaciones diferenciales que modelan las vibraciones mecánicas y los circuitos. Esta relación electro-mecánica es de utilidad cuando se requiere modelar el comportamiento de un sistema mecánico debido a que es mucho más sencillo construir un sistema eléctrico equivalente. En la tabla siguiente se presenta la relación entre los diferentes elementos que componen un sistema eléctrico y un sistema mecánico.

Sistema mecánico	Sistema eléctrico
$m\dfrac{d^2x}{dt^2}+c\dfrac{dx}{dt}+kx=F(t)$	$L\dfrac{d^2Q}{dt^2}+R\dfrac{dQ}{dt}+\dfrac{1}{C}Q=V(t)$
Masa m	Inductancia L
Constante de amortiguamiento c	Resistencia R
Constante del resorte k	Capacitancia recíproca $1/C$
Posición x	Carga Q
Fuerza F	Voltaje V